TD TC1

SF de base

▷ D'après le 1e principe appliqué au système, on a $dU = \delta W + \delta Q$

- la transfo étant adiabatique : $\delta Q = 0$
- les seules forces étant les forces pressantes : $\delta W = -P_{ext}\,dV = -P\,dV$

Ainsi $\underline{dU = -P\,dV}$

D'après le 2nd principe, $dS = \delta S_{créée} + \delta S_{éch}$

or $\delta S_{éch} = \frac{\delta Q}{T} = 0$ car la transfo est adiabatique

donc $\underline{dS = \delta S_{créée}}$

▷ Si la transfo est en plus réversible, on a $dS = 0$

et ça ne change rien pour dU.

▷ Si la transfo est isochore, $\underline{dU = \delta Q}$

et $dS = \delta S_{créée} + \delta S_{éch} = \delta S_{créée} + \frac{\delta Q}{T} = \delta S_{créée} + \frac{dU}{T}$

SF de base

On a $P(V-b) = nRT$

alors $dP(V-b) + P\,dV = nR\,dT$

$P = \frac{nRT}{V-b}$

et $\boxed{dP = \frac{nR}{V-b}\,dT - \frac{P}{V-b}\,dV} = \frac{nR}{V-b}\,dT - \frac{nRT}{(V-b)^2}\,dV$

Ou $P = \frac{nRT}{V-b}$

$$dP = \left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_{V=cste} dT + \left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_{T=cste} dV$$

$$= \frac{nR}{V-b}\,dT - \frac{nRT}{(V-b)^2}\,dV$$

SF1 -

1) Pour système fermé de composition constante, on a

$$dU = TdS - PdV = C_v\,dT$$

ie $$dS = C_v \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} dV = C_v \frac{dT}{T} + \frac{nRT}{T \times V} dV$$

$$= C_v \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

en intégrant entre EI et EF : $$\boxed{\Delta S = C_v \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)}$$

Par ailleurs,

$$dH = TdS + VdP = C_p\,dT$$

ie $$dS = \frac{C_p}{T} dT - \frac{V}{T} dP = \frac{C_p}{T} dT - \frac{nRT}{PT} dP$$

$$= C_p \frac{dT}{T} - nR \frac{dP}{P}$$

On intègre : $$\boxed{\Delta S = C_p \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) - nR \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right)}$$

Enfin $$\Delta S = C_p \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) - nR \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right)$$

$$= C_p \ln\left(\frac{P_f V_f}{nR} \times \frac{nR}{P_i V_i}\right) - nR \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right)$$

$$= C_p \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) + C_p \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right) - nR \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right)$$

$$= C_p \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) + \underbrace{(C_p - nR)}_{= C_v} \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right)$$

$$\boxed{\Delta S = C_p \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) + C_v \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right)}$$

2) Pour une transformation adiabatique réversible d'un syst fermé composé d'un GP de coef $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ ind. de T

$$dS = 0$$

ie $C_v \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} = 0$

or $PV = nRT$, donc $T = \frac{PV}{nR}$ or $dT = \frac{V}{nR} dP + \frac{P}{nR} dV$

Donc $C_v \frac{dT}{T} = C_v \frac{V}{nRT} dP + \frac{C_v P}{nRT} dV = C_v \frac{dP}{P} + C_v \frac{dV}{V}$

Au final $C_v \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} = C_v \frac{dP}{P} + C_v \frac{dV}{V} + nR \frac{dV}{V}$

$$= C_v \frac{dP}{P} + \underbrace{(C_v + nR)}_{= C_p} \frac{dV}{V}$$

ie $C_v \frac{dP}{P} + C_p \frac{dV}{V} = 0$

$\frac{dP}{P} + \frac{C_p}{C_v} \frac{dV}{V} = 0$ ie $d\left(\ln P + \gamma \ln V\right) = 0$

ie $d\left(\ln\left(PV^\gamma\right)\right) = 0$

ie $\underline{PV^\gamma = cste}$:)

SF2 – Exploiter les principes sous forme différentielle

On considère le système {masse m d'eau}.

Entre t et $t+dt$ on lui applique le 1er principe

$$dU = \delta W + \delta Q$$

On a une phase condensée qu'on va supposer idéale, donc la transformation est isochore et $\delta W = 0$.

Par ailleurs, on a $\delta Q = \delta Q_{casserole} - \delta Q_{air}$

$\ominus$ ici car le transfert thermique reçu est l'opposé du transfert thermique fourni par l'eau.

$$\delta Q = \mathcal{P}_0\, dt - G\,(T(t) - T_0)\, dt$$

On a donc $\quad dU = \mathcal{P}_0\, dt - G\,(T(t) - T_0)\, dt$

Par ailleurs, en supposant l'eau comme une phase condensée idéale, on a

$$dU = C\, dT$$

Donc $\quad C\, dT = \mathcal{P}_0\, dt - G\,(T(t) - T_0)\, dt$

$$\boxed{C\,\frac{dT}{dt} + G\,T(t) = \mathcal{P}_0 + G\,T_0}$$

On a donc $\quad T(t) = \lambda\, e^{-t/\tau} + \dfrac{\mathcal{P}_0}{G} + T_0 \qquad$ avec $\tau = \dfrac{C}{G}$

On a par ailleurs $T(0) = T_0$

Donc $\quad \lambda + \dfrac{\mathcal{P}_0}{G} + T_0 = T_0$

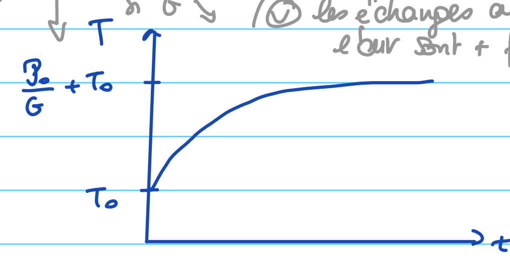
ie $\quad \lambda = -\dfrac{\mathcal{P}_0}{G}$

et $\quad \boxed{T(t) = \dfrac{\mathcal{P}_0}{G}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + T_0}$

On remarque que $T_{final} \nearrow$

si $\mathcal{P}_0 \nearrow$ (on chauffe + fort)

si $G \searrow$ (les échanges avec l'air sont + faibles)



Exercice 2 - Transformation polytropique

1) On a $TdS = dU + PdV$

et $dU = C_v \, dT = \dfrac{nR}{\gamma - 1} dT$

et $PV = nRT$ donc $PdV + VdP = nR\,dT$

ie $PdV = nR\,dT - VdP$ (1)

enfin $PV^k = \text{cste}$ ie $\ln PV^k = \text{cste}'$

ie $\ln P + k \ln V = \text{cste}'$

ie $\dfrac{dP}{P} + k \dfrac{dV}{V} = 0$

ie $VdP = -k\,PdV$

Le passage au ln est très classique quand des produits sont constants

en réinjectant dans (1), on a

$PdV = nR\,dT + k\,PdV$ ie $PdV = \dfrac{nR}{1-k} nR\,dT$

Au final $TdS = \dfrac{nR}{\gamma - 1} dT + \dfrac{nR}{1-k} dT$

$$\boxed{dS = n \, . \, \underbrace{R\left(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{1-k}\right)}_{c \, = \, R\left[\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{1-k}\right]} \frac{dT}{T}}$$

On a alors $\boxed{\Delta S = nR\left(\dfrac{1}{\gamma-1} + \dfrac{1}{1-k}\right) \ln\left(\dfrac{T_1}{T_0}\right)}$.

$(V^{\alpha})' = \alpha V^{\alpha-1}$

$(V^{-k})' = -kV^{-k-1}$

2) $W_p = -\int_{V_0}^{V_1} P_{ext}\,dV \overset{\text{rév.} \Rightarrow \text{Q.S.}}{=} -\int_{V_0}^{V_1} P\,dV \overset{PV^k = cste = P_0V_0^k}{=} -\int_{V_0}^{V_1} \frac{P_0V_0^k}{V^k}\,dV.$

$$= -P_0V_0^k\left[\frac{-1}{(k-1)\,V^{k-1}}\right]_{V_0}^{V_1} = \underline{\frac{P_0V_0^k}{k-1}\left(\frac{1}{V_1^{k-1}} - \frac{1}{V_0^{k-1}}\right)} \quad \text{si } k \neq 1$$

$P_1V_1^k = P_0V_0^k$, donc $P_1V_1 = \dfrac{P_0V_0^k}{V_1^{k-1}}$

et $\boxed{W_p = \frac{1}{k-1}(P_1V_1 - P_0V_0)} = \frac{1}{k-1}\Delta(PV)$

Pour une transfo infinitésimale, on a $\delta W_p = \dfrac{1}{k-1}d(PV)$

$$= \frac{1}{k-1}d(nRT)$$

On a donc $dU = \delta W_p + \delta Q = \dfrac{nR}{k-1}dT + TdS$

$$\frac{nR}{\gamma-1}dT = \frac{nR}{k-1}dT + TdS$$

3) On a $\delta Q = dU - \delta W_p = nR\left(\dfrac{1}{\gamma-1} - \dfrac{1}{k-1}\right)dT$

Donc $Q = nR\left(\dfrac{1}{\gamma-1} - \dfrac{1}{k-1}\right)\Delta T.$

4) • isobare si $k = 0$ $(P = cste)$ on a alors $C = C_p = \dfrac{\gamma}{\gamma-1}nR.$

• isochore si $k \to \infty$ $(P^{1/k}V = cste \to V = cste)$

on a alors bien $W_p = 0$

• adiabatique $\delta Q = 0$ ie $k = \gamma$ (cf. Laplace !)

• isotherme $PV = nRT = cste$ si $k = 1$

Exercice 3 - Chauffage isobare d'un GP

Appliquons le 1e principe entre t et $t+dt$ au gaz + résistance

$$dU = \delta W_{élec} \qquad (\text{en effet } \delta Q = 0 \text{ et } \delta W_{f.press} = 0)$$

parois calorifuges — enceinte indéformable

$$C_v \, dT = E \times i \, dt$$

$$n C_{v,m} \, dT = E \times \frac{E}{r} \, dt$$

$$n C_{v,m} \, dT = E^2 \times \frac{T_0}{r_0 T} \, dt$$

séparation des variables

$$n C_{v,m} T \, dT = \frac{E^2}{r_0} T_0 \, dt$$

2 rédactions :

On intègre entre $t=0$ et t :

$$n C_{v,m} \frac{1}{2} \left(T^2(t) - T_0^2 \right) = \frac{E^2}{r_0} T_0 t$$

ou

On intègre :

$$n C_{v,m} T^2(t) = \frac{E^2}{r_0} T_0 t + cte$$

or $T(0) = T_0$, donc $cte = n C_{v,m} T_0^2$

On a donc $\boxed{T(t) = \sqrt{\frac{2E^2}{n C_{v,m} r_0} T_0 t + T_0^2}}$

Ensuite, on a $V = cte = \dfrac{nRT_0}{P_0} = \dfrac{nRT(t)}{P(t)}$

$$\boxed{P(t) = P_0 \times \sqrt{\frac{2E^2}{n C_{v,m} r_0 T_0} t + 1}}$$

Exercice 4 – Expérience de Rüchardt (très classique)

1) Si on a baissé la bille, on a augmenté la pression le gaz (en le comprimant) et on a alors $P_{gaz} > P_0'$, la bille va donc remonter.
Avec l'inertie, elle va dépasser la position d'éq. On a alors $P_{gaz} < P_0'$, ce qui rappelle la bille vers le bas, etc

→ on aura donc oscillations de la bille.

2) Appliquons le PFD à la bille :

$$m\ddot{x}\,\vec{u_x} = -mg\,\vec{u_x} - P_0 S\,\vec{u_x} + PS\,\vec{u_x}$$

où P est la pression du gaz

$/\vec{u_x}$ $\quad m\ddot{x} = -mg - P_0 S + PS$

Il faut maintenant exprimer P :
On suppose que les oscillations sont très rapides ⇒ transfo adiab.

⊕ on néglige les frottements → on peut supposer la transfo réversible.

On a donc un GP de n cste subissant une transfo adiabatique et réversible
On utilise alors la loi de Laplace

$$PV^\gamma = P_0' V_0^\gamma \quad \text{or } V = V_0 + xS$$

On a donc $\quad P = P_0'\left(\dfrac{V_0}{V_0 + xS}\right)^\gamma = P_0'\left(1 + \dfrac{xS}{V_0}\right)^{-\gamma}$

d'où $\quad m\ddot{x} = -mg - P_0 S + P_0'\left(1 + \dfrac{xS}{V_0}\right)^{-\gamma} S.$

Si $xS \ll V_0$, alors $\left(1 + \dfrac{xS}{V_0}\right)^{-\gamma} = 1 - \gamma\dfrac{xS}{V_0}$

ie $\quad m\ddot{x} + \gamma\dfrac{S}{V_0}x \times P_0' S = -mg - P_0 S + P_0' S = 0$

On a un OH, de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{\gamma P_0' S^2}{m V_0}}$

et de période $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{S} \sqrt{\dfrac{m V_0}{\gamma P_0'}}}$

On a donc $\boxed{\gamma = \dfrac{4\pi^2}{T^2} \dfrac{m V_0}{P_0' S^2}}$

Exercice 5 - Moteur ditherme

1) On considère le système {source froide + source chaude}.

On applique le 2nd principe sur un cycle

$$dS = 0 \quad \text{car on considère un cycle}$$

$$dS = \delta S_{éch} + \underbrace{\delta S_{créée}}_{=0} \quad \text{car transformation réversible}$$

$$= \delta S_{éch\,1} + \delta S_{éch\,2}$$

En appliquant le 1er principe à la source 1 sur un cycle, on a

$$dU_1 = \delta Q_1 \qquad (\delta W = 0 \text{ car la source est une phase condensée})$$

$$m c\, dT_1 = \delta S_{éch\,1} \times T_1$$

$$\delta S_{éch\,1} = m c \frac{dT_1}{T_1}$$

De même, $\delta S_{éch\,2} = m c \dfrac{dT_2}{T_2}$

Enfin $\quad m c \dfrac{dT_1}{T_1} + m c \dfrac{dT_2}{T_2} = 0 \quad$ donc $\boxed{\dfrac{dT_1}{T_1} + \dfrac{dT_2}{T_2} = 0}$

2) Le moteur s'arrête de fonctionner quand les sources ont la même température T_f.

On a $\quad \dfrac{dT_1}{T_1} = -\dfrac{dT_2}{T_2}$

$$\int_{EI}^{EF} \frac{dT_1}{T_1} = -\int_{EI}^{EF} \frac{dT_2}{T_2} \quad \text{ie} \quad \ln\left(\frac{T_f}{T_{1\,0}}\right) = -\ln\left(\frac{T_f}{T_{2\,0}}\right)$$

ie $\ln\left(\frac{T_f^2}{T_{10}\,T_{20}}\right) = 0$

ie $\frac{T_f^2}{T_{10}\,T_{20}} = 1$ et $\boxed{T_f = \sqrt{T_{10}\,T_{20}}}$

3) On applique le 1er principe au fluide de la machine entre l'instant initial et l'état final :

$$\Delta U = W + Q_1 + Q_2$$

avec Q_1 le transfert thermique reçu depuis la source 1 (ie celui fourni par la source 1)
avec Q_2 le transfert thermique reçu depuis la source 2 (ie celui fourni par la source 2)

Si on applique le 1er principe à la source 1 :

reçu par la source = − transfert fourni

$$\Delta H = -Q_1$$

$$m\,c\,(T_f - T_1) = -Q_1$$

De même, $m\,c\,(T_f - T_2) = -Q_2$

On a donc $\Delta U = W - mc\,(2T_f - T_{10} - T_{20})$

Par ailleurs, sur toute la durée, on aura eu N cycles, donc $\Delta U = 0$

et $W = mc\,(2T_f - T_{10} - T_{20}) = \underline{-120\ kJ}$

4) $\eta_{reel} = \frac{W}{Q_1} = \frac{2T_f - T_{10} - T_{20}}{T_f - T_{10}} = 0,11$

on a bien $\eta_{reel} < \eta_{carnot}$.

et $\eta_{carnot} = 1 - \frac{T_{20}}{T_{10}} = 0,21$